



ESTRATÉGIAS DE PRÉ-CONDICIONAMENTO DE ESCOAMENTOS COMPRESSÍVEIS

R. S. Silva* A. L. G. A. Coutinho*,
R. C. Almeida*, A. C. Galeão*

* Laboratório Nacional de Computação Científica

* Programa de Engenharia Civil - COPPE

Abstract. Neste trabalho é apresentada uma estratégia de congelamento do pré-condicionador combinada com o método de Newton-Krylov-Schwarz Inexato que permite a redução do custo computacional sem o comprometimento da qualidade da solução.

Palavras-chave: Pré-Condicionador, Newton-Krylov-Schwarz, Escoamentos Compressíveis

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho se está interessado em resolver numericamente as equações estacionárias de Euler e Navier-Stokes compressível. É sabido que uma estratégia eficiente para resolver tais problemas estacionários não-lineares consiste em obter a solução via um esquema incremental, partindo-se de uma solução inicial e marchando no tempo até alcançar a solução desejada. Neste caso, é desejável utilizar um algoritmo transitório que seja estável e computacionalmente eficiente. Como o esquema de integração no tempo não requer alta ordem de precisão, a aproximação de elementos finitos constante no tempo e linear no espaço, utilizando formulações estáveis do tipo Petrov-Galerkin, como o método SUPG e CAU, combinado com um algoritmo predictor-corretor, se adequam perfeitamente (Almeida, 1993).

Do ponto de vista computacional este algoritmo tem um alto custo computacional, mesmo em um problema de pequena ordem, pois é necessário calcular e armazenar a matriz tangente assim como resolver um sistema de equações a cada incremento de tempo. Este elevado custo pode ser reduzido pela utilização dos chamados métodos de Newton Inexatos, onde os algoritmos de resolução direta são substituídos por iterativos. Esta substituição permite uma redução da área de armazenamento e possibilita um custo menor na resolução do sistema de equações, mas em contrapartida requer o uso de pré-condicionadores que assegurem a aceleração da convergência dos esquemas iterativos.

Diferentes procedimentos de redução do custo computacional, via estratégias de congelamento do pré-condicionador após a execução de um certo número de passos, podem

ser encontrados na literatura (Brown and Saad, 1990; Venkatakrisnan, 1995). Estas estratégias baseiam-se no fato de que, na vizinhança da solução, a matriz tangente varia pouco a cada passo. No entanto, com estes procedimentos, um grande esforço computacional é dispendido no início do processo (longe da solução). Já na vizinhança da solução o ganho computacional decorrente do congelamento do pré-condicionador pode ser superado pelo custo computacional adicional advindo da redução da taxa de convergência decorrente de uma má aproximação do pré-condicionador.

Neste trabalho propõe-se uma metodologia de redução do custo computacional via congelamento do pré-condicionador de forma a não reduzir, acentuadamente, a taxa de convergência do algoritmo preditor-corretor, garantindo de forma global, a eficiência computacional do método de resolução.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O escoamento compressível de um fluido newtoniano num domínio bidimensional, $\Omega \subset R^2$ de fronteira suave Γ é descrito pelas equações de Navier Stokes que representam: a conservação de massa; balanço de momentum e o balanço de energia. Se designamos por U ao vetor de variáveis de conservação, $U^T = [\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho e]$, onde ρ é a densidade, u_i ($i = 1, 2$) são as componentes do campo de velocidades e e é a densidade de energia total, esse sistema de equações é descrito por:

$$U_{,t} + F_{i,i} = F_{i,i}^d + \mathcal{F} \quad \text{em } \Omega \quad (1)$$

onde F_i ($i = 1, 2$) são os fluxos de Euler; F_i^d ($i = 1, 2$) são os fluxos dissipativos devidos aos termos viscosos e de calor e \mathcal{F} é o termo de fonte.

Objetivando a construção de métodos de elementos finitos estabilizados o sistema de equações (1) pode ser escrito na forma

$$U_{,t} + A \cdot \nabla U = \nabla \cdot K \nabla U + \mathcal{F} \quad \text{em } \Omega \quad (2)$$

onde $\nabla^t(\cdot) = \left(I_m \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1}, I_m \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2} \right)$ é o operador gradiente generalizado; $A_i = F_{i,U}$ são as matrizes jacobianas do fluxo de Euler e $K_{i,j} U_j = F_i^d$ ($i = 1, 2$). Tal sistema pode ainda ser escrito numa forma simétrica (Hughes et al., 1986), utilizando-se as variáveis (físicas) de entropia. A grande vantagem de se utilizar tal forma reside no fato de que a formulação variacional baseada no método de Galerkin conduz à satisfação automática da segunda lei da termodinâmica que governa a produção de entropia e representa a condição básica que distingue soluções fisicamente admissíveis das não admissíveis.

Assim, se designamos por V às variáveis de entropia, a transformação de variáveis conduz ao seguinte sistema simétrico

$$A_0 V_{,t} + \tilde{A} \cdot \nabla V = \nabla \cdot \tilde{K} \nabla V + \vartheta \quad (3)$$

onde: $A_0 = U_{,V}$ é simétrica e positiva definida, as matrizes $\tilde{A}_i = A_i A_0$ são simétricas e \tilde{K} é simétrica positiva semi-definida com $\tilde{K}_{ij} = K_{ij} A_0$.

2.1. APROXIMAÇÃO NUMÉRICA

Como é bem sabido, o caráter predominantemente convectivo dos problemas a serem abordados requerem o uso de formulações estabilizadas de elementos finitos do tipo SUPG e CAU. No entanto para o objetivo básico deste trabalho, e sem perda de generalidade, nos restringiremos a aproximações numéricas via o método SUPG (Hughes and Mallet, 1986) baseados na formulação variacional espaço-tempo de (3).

Para tanto consideremos as partições $0 = t_0 < t_1 \dots < t_n < t_{n+1} < \dots$ de R , e denotemos por $I_n = (t_n, t_{n+1})$ o n -ésimo intervalo de tempo. Neste contexto o domínio de integração espaço-tempo é $\Omega_n = \Omega \times I_n$, com o contorno $\bar{\Gamma}_n = \Gamma \times I_n$. Suponhamos ainda que para o n -ésimo passo no tempo, o domínio espacial está particionado em $(N_e)_n$ elementos Ω^e e portanto em $\Omega_n^e = \Omega^e \times I_n$, $e = 1, \dots, (N_e)_n$.

Com base nestas definições, a solução aproximada do método SUPG, com base numa formulação variacional espaço-tempo é o elemento $V^h \in S_n^h$, tal que para $n = 0, 1, 2, \dots$, a seguinte relação seja verificada:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_n} \widehat{V}^h \cdot \left(A_0 V_{,t}^h + \tilde{A} \cdot \nabla V^h - \nabla \cdot \tilde{K} \nabla V^h - \vartheta \right) dxdt + \\ & \sum_{e=1}^{(N_e)_n} \int_{\Omega_n^e} \left(A_0 \widehat{V}^h + \tilde{A} \cdot \nabla \widehat{V}^h \right) \cdot \tau_s^e \left(A_0 V_{,t}^h + \tilde{A} \cdot \nabla V^h - \nabla \cdot \tilde{K} \nabla V^h - \vartheta \right) dxdt + \\ & \int_{\Omega} \widehat{V}^h(t_n^+) \cdot A_0 \left(V^h(t_n^+) - V^h(t_n^-) \right) dx = 0, \quad \forall \widehat{V}^h \in \mathfrak{S}_n^h \end{aligned} \quad (4)$$

onde a matriz τ_s^e , $(m \times m)$ é definida em (Shakib, 1985).

$$S_n^h = \left\{ V^h; V^h \in \left(C^0(\Omega_n) \right)^m; V^h|_{\Omega_n^e} \in \left(P^k(\Omega_n^e) \right)^m; f^1(V^h)|_{\bar{\Gamma}_n} = g(t) \right\} \quad (5)$$

é o conjunto das funções teste e

$$\mathfrak{S}_n^h = \left\{ \widehat{V}^h; \widehat{V}^h \in \left(C^0(\Omega_n) \right)^m; \widehat{V}^h|_{\Omega_n^e} \in \left(P^k(\Omega_n^e) \right)^m; f^2(\widehat{V}^h)|_{\bar{\Gamma}_n} = 0 \right\} \quad (6)$$

é o espaço das variações admissíveis.

Nas expressões anteriores P^k é o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a k . $f^1, f^2: \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^i, 0 \leq i \leq m$, são as funções de transformação das condições de contorno, não-lineares, de variáveis de entropia para variáveis de conservação.

Dado que o caráter transiente do modelo adotado visa única e exclusivamente resolver a não-linearidade intrínseca ao modelo real do problema estacionário, adotamos uma aproximação de elementos finitos descontínua e constante no tempo, e seccionalmente linear e contínua no espaço. Obviamente, para problemas realmente dependentes do tempo, esta aproximação conduziria a um esquema de baixa ordem de precisão no tempo. No entanto, para a obtenção de soluções não lineares de problemas estacionários este esquema é altamente vantajoso do ponto de vista computacional, no sentido que a discretização no tempo não acarreta num aumento do número de graus de liberdade em cada passo de tempo.

3. MÉTODO DE NEWTON-KRYLOV-SCHWARZ INEXATO

A aproximação de elementos finitos da forma variacional, Eq. (4), conduz a um sistema de equações algébricas não-lineares, com $(N_p)_n \times m$ incógnitas nodais, onde $(N_p)_n$ representa o número total de nós da malha de elementos finitos no n -ésimo passo de tempo e m corresponde ao número de incógnitas em cada nó ($m = 4$).

De uma forma geral a resolução desse sistema de equações não-lineares pode ser expressa por

$$G(u_{n+1}; u_n) = 0 \quad (7)$$

onde u_n é a solução inicial conhecida (solução final do passo anterior) e u_{n+1} é a solução a ser obtida no instante t_{n+1} . Expandido-se em série de Taylor tal que, denotando por u^l a aproximação na l -ésima iteração com $u^0 = u_n$, escreve-se

$$G(u_{n+1}; u_n) = G(u^l; u_n) + \frac{\partial G(u^l; u_n)}{\partial u} \delta u^l = 0 \quad (8)$$

com $\delta u^l = u^{l+1} - u^l$. Designando-se

$$J(u^l) = \frac{\partial G(u^l; u_n)}{\partial u} \quad (9)$$

como a matriz tangente e

$$R(u^l) = G(u^l; u_n) \quad (10)$$

como o vetor resíduo da l -ésima iteração, o sistema (8) pode ser resolvido via o algoritmo predictor-corrector utilizado em (Almeida, 1993) apresentado na Tabela 1.

<pre> 1. - Inicialização u^0 2. - Incremento no tempo Do $n = 0, \dots, n_{step} - 1$ 3. - Passo Predictor $u^0 = u_n$ 4. - Determine Δt 5. - Passo Multi-Corrector Do $l = 0, \dots, l_{max} - 1$ $J(u^l)\delta u^l = -R(u^l)$ $u^{l+1} = u^l + \delta u^l$ Enddo $u_{n+1} = u^{l+1}$ If $\ u_{n+1} - u_n\ \leq tol$ Stop Enddo </pre>

Tabela 1: Algoritmo Predictor-Corrector

Para problemas estacionários é suficiente utilizar $l_{max} = 1$. O passo corretor consiste no uso do método de Newton, também conhecido como método de Newton-Raphson, que requer a resolução de um sistema de equações lineares a cada iteração do método.

Do ponto de vista computacional este algoritmo tem um alto custo, pois é necessário calcular e armazenar a matriz tangente, assim como resolver um sistema de equações a cada incremento de tempo. Este custo pode ser reduzido utilizando-se os chamados métodos de Newton Inexatos, também conhecidos como métodos de Newton Truncados

(Truncated Newton method), onde o método direto é substituído por um método iterativo (Brown and Saad, 1990; Venkatakrishnan, 1995). Nesta classificação incluem-se os chamados métodos de Newton-Krylov.

O termo Newton-Krylov se refere ao uso de um método iterativo do tipo Krylov, para resolver o sistema de equações, onde o cálculo da ação da matriz tangente de G sobre um vetor de Krylov z_i é aproximada por

$$J(u_i)z_i \sim \frac{1}{\epsilon} [G(u_i + \epsilon z_i) - G(u_i)] \quad (11)$$

sendo ϵ uma constante dependente do tipo de problema que se deseja resolver. O inconveniente deste procedimento recai na escolha do parâmetro ϵ : se ϵ for “muito grande”, avalia-se mal a aproximação (11); se for “muito pequeno”, a aproximação (11) fica suscetível a erros de arredondamento (Venkatakrishnan, 1995). Em contrapartida, com este procedimento evita-se o armazenamento da matriz tangente (matrix free methods). A vantagem do uso da aproximação (11) é que esta permite que seja melhorada a convergência do método de Newton Inexato (Cai et al., 1996; Venkatakrishnan, 1995).

Entretanto, os métodos iterativos empregados necessitam de um pré-condicionador e portanto é ainda necessário o armazenamento e a geração de uma aproximação da matriz tangente. Assim, neste trabalho a nomenclatura Newton-Krylov-Schwarz Inexato (NKSI) se refere ao emprego de um método Krylov-Schwarz para resolver o sistema de equações lineares do algoritmo predictor-corretor, dando origem assim a um método do tipo Newton-Krylov-Schwarz no qual não se utiliza a aproximação (11). Na próxima seção apresentaremos a versão aditiva do método de Schwarz com sobreposição.

4. MÉTODO ADITIVO DE SCHWARZ COM SOBREPOSIÇÃO

O método utilizado na resolução do sistema do passo corretor é uma versão do apresentado em 1870 por Schwarz. Com a difusão das máquinas paralelas, métodos iterativos baseados na versão aditiva do método de Schwarz passaram a ser largamente empregados por serem altamente paralelizáveis e, portanto, de fácil implementação nestas máquinas (Chan and Mathew, 1994; Tallec, 1994).

Estes métodos substituem a resolução direta de um problema descrito por uma equação diferencial parcial linear definida em um certo domínio por um processo iterativo de resolução de sub-problemas definidos em subdomínios que se sobrepõem e constituem uma cobertura do domínio do problema global original.

Originariamente o método de Schwarz foi proposto particionando-se o domínio original em dois sub-domínios. Assim, utilizando-se uma notação matricial e partindo-se da n -ésima iteração u^l , a versão aditiva do método de Schwarz fornece a $(l + 1)$ -ésima iteração, δu^{l+1} , resolvendo, alternadamente, os sub-problemas:

$$\delta u^{l+\frac{1}{2}} = \delta u^l - R_1^T J(u)_1^{-1} R_1 (R(u) + J(u)\delta u^l) \quad (12)$$

$$\delta u^{l+1} = \delta u^{l+\frac{1}{2}} - R_2^T J(u)_2^{-1} R_2 (R(u) + J(u)\delta u^l) \quad (13)$$

onde:

$$J(u)_1 = R_1 J(u) R_1^T \quad \text{e} \quad J(u)_2 = R_2 J(u) R_2^T \quad (14)$$

e R_i^T e R_i ($i = 1, 2$) representam matrizes de extensão e restrição respectivamente, e os índices 1 e 2 referem-se aos subdomínios da partição do domínio original (Tallec, 1994; Chan and Mathew, 1994; Silva, 1998).

Em muitos casos a partição do domínio em dois não é suficiente, pois a solução dos problemas locais ainda pode ser uma tarefa complexa. Portanto é necessária a generalização do conjunto de equações (12) para um número maior de partições do domínio. Admitindo-se que o domínio Ω tenha sido particionado em NP subdomínios Ω_i , $i = 1, 2, \dots, NP$, a versão aditiva passa a ser escrita como

$$\delta u^{l+i/NP} = \delta u^{l+(i-1)/NP} - R_i^T J(u)_i^{-1} R_i \left(R(u) + J(u) \delta u^l \right) \quad i = 1, 2, \dots, NP. \quad (15)$$

Substituindo os valores de $\delta u^{l+(i-1)/NP}$ nas equações (15) obtém-se a equação geral para o método Aditivo de Schwarz com sobreposição:

$$\delta u^{l+1} = \delta u^l - \sum_{i=1}^{NP} R_i^T J(u)_i^{-1} R_i \left(R(u) + J(u) \delta u^l \right) \quad (16)$$

É interessante observar que o método aditivo de Schwarz, como apresentado na Eq. (16), também pode ser interpretado como o método de resolução estacionário de Richardson Modificado, muitas vezes denominado somente com método de Richardson, pré-condicionado com o parâmetro de relaxação (Θ) igual a 1, onde a matriz de pré-condicionamento é definida como:

$$M^{-1} = \sum_{i=1}^{NP} R_i^T J(u)_i^{-1} R_i \quad . \quad (17)$$

É de conhecimento geral que a convergência do método estacionário de Richardson é muito lenta, quase linear, e portanto necessita-se usar alguma técnica para acelerar sua convergência. Todo método iterativo consistente e linear pode ser escrito como o método de Richardson com $\Theta = 1$ (Tallec, 1994) e desta forma, pode-se acelerar a convergência do método aditivo de Schwarz utilizando-se qualquer outro método iterativo que possua uma maior taxa de convergência e onde a matriz de pré-condicionamento é dada pela Eq. (17).

5. MÉTODOS DE KRYLOV-SCHWARZ

Na modelagem numérica das equações de Navier-Stokes, sistemas de equações não simétricas são gerados e portanto, a escolha do método iterativo mais apropriado para acelerar a convergência do ASM está longe de ser uma tarefa fácil. Os mais utilizados são os métodos não-estacionários obtidos a partir de aproximações em subespaços de Krylov, os chamados métodos de Krylov, baseados em minimização do resíduo por serem os mais robustos (Saad, 1995).

Neste trabalho utilizou-se o método FGMRES (Flexible Generalized Minimal Residual). Este método é uma versão do método GMRES diferenciando-se deste na forma pela qual a base de Krylov é gerada. Assim para o FGMRES, o sub-espaço de Krylov é expresso por

$$\text{span} \left[r_0, J(u) M_1^{-1} v_1, J(u)^2 M_2^{-1} v_2, \dots, J(u)^k M_k^{-1} v_k \right] \quad (18)$$

Para que seja possível o cálculo da nova solução aproximada torna-se necessário o armazenamento dos vetores $z_i = M_i^{-1} v_i$ pois a matriz M_i^{-1} poderá ser diferente para cada

v_k da base. Esta versão tem a desvantagem de requerer que sejam armazenados mais k vetores.

Devido a possibilidade de utilização de métodos iterativos na resolução do pré-condicionador adotou-se o método FGMRES(k), tomando-se M_j constante para todos os valores de j e definida como na Eq. (17). Com isso acelera-se a convergência do ASM com um método que possui características semelhantes ao GMRES. Essa combinação do FGMRES(k) e o ASM será de agora em diante denominada método de Krylov-Schwarz (KSM).

Um dos fatores responsáveis pela eficiência dos métodos KSM está relacionado à forma pela qual são resolvidos os problemas locais. A solução de tais problemas é de importância fundamental não só no que diz respeito a convergência do KSM como também porque a maior parte do custo computacional dos métodos de decomposição de domínio está relacionada à resolução dos problemas locais.

Para a solução destes problemas podem ser usados métodos diretos ou iterativos de resolução de sistemas de equações (Silva and Almeida, 1997). Entretanto para retirar a influência de uma solução local aproximada na convergência do NKSI adotou-se o método de fatoração LU .

6. ESTRATÉGIA DE CONGELAMENTO DO PRÉ-CONDICIONADOR

Devido ao grande número de passos do algoritmo preditor-corretor, seu custo computacional é muito alto, mesmo em um problema de pequena ordem. Para minimizá-lo é apresentada em (Venkatakrishnan, 1995) uma estratégia que congela o pré-condicionador após a execução de um certo número de passos. Esta estratégia baseia-se no fato de que, na vizinhança da solução, a matriz tangente varia pouco a cada passo, e portanto justificar-se-ia manter o pré-condicionador inalterado (congelamento). No entanto, com essa estratégia, um grande esforço computacional é dispendido no início do processo (longe da solução). Já, na vizinhança da solução, o ganho computacional decorrente do congelamento do pré-condicionador pode ser superado pelo custo computacional adicional advindo da redução da taxa de convergência do KSM decorrente de uma má aproximação do pré-condicionador.

Neste trabalho, propõe-se calcular o pré-condicionador a cada n_{ipre} passos do algoritmo preditor-corretor. Com isso consegue-se uma estratégia menos dependente da escolha de um dado parâmetro, visto que o pré-condicionador é calculado a cada n_{ipre} passos, como apresentado a seguir.

7. RESULTADOS NUMÉRICOS

Consideremos o chamado de *problema de Carter*, que consiste em um escoamento viscoso supersônico (número de Mach $M = 3$) bi-dimensional incidindo sobre uma placa plana com ângulo de ataque zero. O domínio computacional as condições de contorno são apresentados na Fig. 1. Ali, o índice ∞ refere-se às condições do escoamento não perturbado pela placa, a saber: $\rho_\infty = 1$, $\mathbf{u}_\infty = 1$ e $\theta_\infty = 2.769 \times 10^{-4}$. A temperatura de estagnação, definida como $\theta_{stag} = \theta_\infty \left(1 + \frac{1}{2} (\gamma - 1) M_\infty^2\right)$ é prescrita sobre a placa e a lei de viscosidade de Sutherland é aplicada para modelar a dependência da viscosidade sobre a temperatura.

Para demonstrar as vantagens e desvantagens do uso do NKSI, utilizou-se o método SUPG com uma malha de 16x72 elementos (4964 graus de liberdade); adotou-se a to-

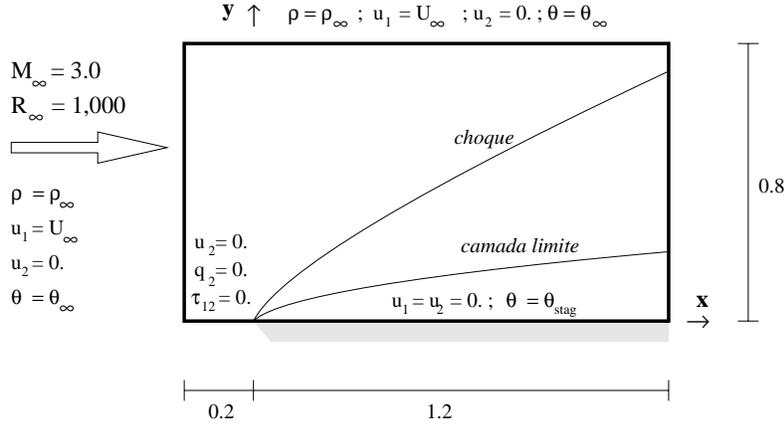


Figura 1: Domínio computacional e condições de contorno

lerância do algoritmo preditor-corretor igual a 10^{-4} , tolerância do KSM igual a 10^{-6} . O número de passos do algoritmo preditor-corretor para os solucionadores propostos na seção 4.4 são apresentados na Tabela 2. Nota-se que o algoritmo apresentou um aumento do número de passos, como consequência do aumento do número de partições como esperado. Entretanto, com o aumento do número de partições a eficiência computacional do algoritmo não é prejudicada.

NKSI					
NP = 2		NP = 4		NP = 8	
It.	$T_{exc}(s)$	It.	$T_{exc}(s)$	It.	$T_{exc}(s)$
54	4076.19	53	1097.89	64	478.92

Tabela 2: Número de passos do algoritmo preditor-corretor com o solucionador local LU do Método de Newton-Krylov-Schwarz.

Quando a solução deste exemplo é obtida utilizando-se o algoritmo preditor-corretor com o método de Newton, obtém-se 78 passos. As possíveis causas da diminuição quando se utiliza o KSM são: a reinicialização do método FGMRES, que permite que não sejam acumulados erros de arredondamento, e as condições de contorno impostas nas regiões de sobreposição entre os domínios.

Para testar a estratégia de congelamento do pré-condicionador utilizou-se uma malha com 1332 graus de liberdade, tolerância local igual a 10^{-6} , tolerância do algoritmo preditor-Corretor igual a 10^{-4} e o número máximo de passos igual a 100. Os tempos de execução para esta estratégia com NP = 2 são apresentados na Tabela 3 e com NP = 4 na Tabela 4.

Observa-se que congelando-se o pré-condicionador o número de iterações do KSM aumenta, porém sem alterar o número de passos. O menor tempo foi conseguido com n_{ipre} igual a 10 para NP = 2 e igual 5 para NP = 4. A partir destes valores o custo começa a aumentar devido ao aumento do número de iterações do KSM. Mesmo assim, com a utilização dos demais valores de n_{ipre} , a redução do tempo de execução é da ordem de 40% com NP = 2. Para NP = 4 a faixa de valores n_{ipre} onde a redução é significativa, $n_{ipre} = 5$ e $n_{ipre} = 10$, é bem menor devido ao grande aumento das iterações do KSM para os demais valores.

Estes resultados sugerem a viabilidade da utilização deste procedimento para proble-

mas deste tipo. Obviamente o valor ótimo de n_{ipre} e a largura da faixa de valores utilizáveis de n_{ipre} são dependentes do problema a ser resolvido e do número de partições. Deve-se ressaltar que o tempo apresentado é o tempo médio de execução no SP2 do LNCC com carga heterogênea, mas razoavelmente constante durante as tomadas de tempo.

Congelamento do Pré-Condicionador NP = 2			
n_{ipre}	It. NKSI	It. KSM	$\overline{T}_{exc}(s)$
1	43	56	166,7
5	43	86	95,4
10	43	159	87,3
15	43	206	90,4
20	43	248	94,9
25	43	275	97,5

Tabela 3: Teste do congelamento do Pré-Condicionador com NP = 2 (1332 ndof).

Congelamento do Pré-Condicionador NP = 4			
n_{ipre}	It. NKSI	It. KSM	$\overline{T}_{exc}(s)$
1	43	60	297,8
5	43	91	154,3
10	43	177	199,7
15	43	238	207,0
20	43	287	235,0
25	43	320	251,0

Tabela 4: Teste do congelamento do Pré-Condicionador com NP = 4 (1332 ndof).

8. CONCLUSÕES

Neste trabalho mostrou-se que o método NKSI com a estratégia de congelamento é eficiente na redução do custo computacional da resolução de problemas de Dinâmica dos Fluidos Computacional. A estratégia do congelamento do pré-condicionador tem se mostrado muito eficiente em todos os exemplos rodados, reduzindo substancialmente o tempo de execução. Maior flexibilidade pode ser dada à combinação entre o procedimento de congelamento do pré-condicionador com o método de NKSI, utilizando-se um mecanismo de retroalimentação que permita aumentar ou diminuir o número de passos congelados em função da taxa de convergência do algoritmo preditor-corretor.

A limitação ao tamanho do problema imposta pela utilização de um solucionador direto é séria quando se pensa em utilizar clusters, redes de estações de trabalho ou PC's. Entretanto, esta limitação pode ser contornada se utilizando máquinas paralelas, como o SP2 do LNCC que possui uma grande quantidade de memória em cada nó.

REFERÊNCIAS

Almeida, R. C. (1993). *Uma Formulação de Petrov-Galerkin para a Resolução das Equações de Euler e Navier-Stokes Compressível Usando Técnicas Adaptativas*. Tese de doutorado em engenharia nuclear, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro.

- Brown, P. N. and Saad, Y. (1990). Hybrid Krylov methods for nonlinear systems of equations. *SIAM Journal Sci. Stat. Comput.*, 11:450–481.
- Cai, X. C., Keyes, D., and Venkatakrisnan, V. (1996). Newton-Krylov-Schwarz: An implicit solver for CFD. In et al., R. G., editor, *Eighth International Conference on Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, New York. J. Wiley & Sons.
- Chan, T. F. and Mathew, T. (1994). *Domain Decomposition Algorithms*. Acta Numerica.
- Hughes, T. J. R., Franca, L. P., and Mallet, M. (1986). A new finite element formulation for computational fluid dynamics: I. symmetric forms of the compressible Euler and Navier-Stokes equations and the second law of thermodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 54:223–234.
- Hughes, T. J. R. and Mallet, M. (1986). A new finite element formulation for computational fluid dynamics: Iii. the generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58:305–328.
- Saad, Y. (1995). Preconditioned krylov subspace methods for CFD. In Habashi, W. G., editor, *Applications in Solution Techniques for Large-Scale CFD Problems*, Computational Methods in Applied Sciences. John Willey & Sons.
- Shakib, F. (1985). *Finite Element Analysis of the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations*. Phd thesis, Stanford University.
- Silva, R. S. (1998). *Estratégias de Resolução em Sistemas Distribuídos de Problemas em Dinâmica dos Fluidos Computacional Via Elementos Finitos Adaptativos*. Tese de doutorado em engenharia civil, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Silva, R. S. and Almeida, R. C. (1997). Iterative local solvers for distributed Krylov-Schwarz method applied to convection-diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 149:353–362.
- Taltec, P. L. (1994). Domain decomposition methods in computational mechanics. *Computational Mechanics Advances*, 1(2).
- Venkatakrisnan, V. (1995). Implicit schemes and parallel computing in unstructured grid CFD. Technical Report 28, ICASE.

PRE-CONDITIONER STRATEGIE FOR COMPRESSIBLE FLOWS

Abstract: *In this paper, it is presented a strategie to freeze the pre-conditioner combined with an Inexact Newton-Krylov-Schwarz method. This procedure saves the computational cost without loosing accuracy of the approximated solution.*

Key-words: *pre-conditioner, Newton-Krylov-Schwarz, compressible flow.*